เมตริกซ์และ ดีเทอร์มิแนนต์

1. เรื่องทั่วไปของเมตริกซ์

สมบัติที่ควรทราบ

1.1 ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน จะได้ว่า

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
2. ถ้า $A + B = A + C$ แล้ว $B = C$ (สมบัติการตัดออก)
3. $A + B = B + A$ (สมบัติการสลับที่)
4. จะมีเมตริกซ์ $\underline{0}$ ที่มีมิติเดียวกับ A ที่ทำให้ $A + \underline{0} = A = \underline{0} + A$ (การมีเอกลักษณ์)
5. สำหรับทุกเมตริกซ์ A จะมีเมตริกซ์ -A ที่ทำให้ $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$ (การมีอินเวอร์ส)

1.2 ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์ที่สามารถคูณกันได้ จะได้ว่า

1. $(AB)C = A(BC)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (สมบัติการกระจาย)

   $(B + C)A = BA + CA$
3. ถ้า $k \in R$ จะได้ว่า $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
4. $\underline{0}A = \underline{0} = A\underline{0}$
5. มีเมตริกซ์ที่ทำให้ $1A = A = A1$
6. โดยทั่วไป

   6.1 $AB \neq BA$

   6.2 $(A \pm B)2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ (จะเท่ากันได้เมื่อ $AB = BA$)

   6.3 $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$ (จะเท่ากันได้เมื่อ $BA = AB$)
7. ถ้า $AB = AC$ ไม่จำเป็นที่ $B = C$
8. ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$

1.3 กำหนด A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ และทรานสโพสของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^t แล้วจะได้ว่า

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
3. $(AB)^t = B^tA^t$
4. $(kA)^t = kA^t, k \in R$
5. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
6. $(A^t)^n = (A^n)^t$

1.4 เมตริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) A จะเป็นเมตริกซ์สมมาตรก็ต่อเมื่อ A^t = A เช่น

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 เมตริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew Symmetric Matrix) A จะเป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตรก็ต่อเมื่อ $A^t = -A$ นั่นคือ เมตริกซ์ A จะต้องมีสมบัติ คือ

1. A เป็นเมตริกซ์จตุรัส
2. $a_{ij} = -a_{ij}$ ทุกค่า $i \neq j$
3. $a_{ij} = 0$

เช่น $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

2. อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

2.1 การหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

1. เมตริกซ์มิติ 2 x 2

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, a, b, c, d $\in$ R แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

2. เมตริกซ์มิติ 3 x 3

$$A^{-1} = \frac{1}{dc - A}.\text{adj}A$$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$

$Cij = (-1)^{i+j} M_{ij}$

2.2 สมบัติของอินเวอร์สเมตริกซ์

จะเรียกเมตริกซ์ที่ไม่สามารถหาอินเวอร์สได้ว่า เมตริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) จะเรียกเมตริกซ์ที่สามารถหาอินเวอร์สได้ว่า เมตริกซ์ที่ไม่ใช่เมตริกซ์เอกฐาน (Non-Singular Matrix) กำหนด A, B และ C เป็นเมตริกซ์จตุรัส n x n และ A เป็นเมตริกซ์ที่ไม่ใช่เมตริกซ์เอกฐาน แล้ว

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $AB = AC$ แล้ว $B = C$

   $BA = CA$ แล้ว $B = C$
4. $A^{-n} = (A^{-1})^{n}$
5. $kA^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, $k \neq 0$
6. $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$
7. เรียก A ว่า เมตริกซ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^{t} = A^{-1}$

3. ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

3.1 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์

1. เมตริกซ์ 1 x 1

   ถ้า $A = [a]$, $a \in R$ แล้ว $\det(A) = a$
2. เมตริกซ์ 2 x 2

   ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in R$ แล้ว $\det(A) = ad - bc$

3.2 สมบัติของ Determinant

กำหนด A และ B เป็นเมตริกซ์จตุรัส มิติ n x n แล้ว

1. $\det(A) = \det(A^{t})$
2. โดยทั่วไปไม่จำเป็นที่ $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ ถ้า A เป็นเมตริกซ์ที่สามารถหาอินเวอร์สการคูณได้
5. $\det(A^{m}) = (\det A)^{m}$, $m \in I$
6. $\det(kA) = kn \det(A)$, $k \in R$
7. A เป็น Non-Singular Matrix ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$
8. $\det(I_n) = 1$ และ $\det(\underline{0}) = 0$

9. ถ้า A เป็นเมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งเท่ากับ 0 แล้ว det(A) = 0

เช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, det(A) = 0

10. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จตุรัสที่มีสมาชิกใน 2 แถว หรือ 2 หลักซ้ำกันแล้ว det(A) = 0

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, det(A) = 0

11. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จตุรัส และ B เป็นเมตริกซ์ใหม่ที่เกิดจาก A โดยการสลับที่กันระหว่างแถวคู่ใดคู่หนึ่งหรือหลักคู่ใดคู่หนึ่งของ A เพียงคู่เดียวแล้ว det(B) = -det(A)

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, det A = 17

$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, det B = -17

12. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จตุรัส และ B เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจากการคูณแถวคู่ใดคู่หนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งของ A ด้วยค่าคงที่ C แล้ว det B = C det A เช่น

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, det A = -2

B เกิดจากการนำจำนวนจริง 2 คูณหลักที่ 1 ของ A

$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, det B = -2

จะเห็นว่า det B = 2 det A

4. การแก้สมการเชิงเส้นหลายตัวแปรของสมการ Ax = B, B $\neq \underline{0}$

1. หาได้จาก $x = A^{-1} B$

โดย A = เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ x = เมตริกซ์ตัวแปร B = เมตริกซ์ค่าคงที่

1. ถ้า A เป็น Non-Singular Matrix (det(A) ≠ 0) ระบบสมการนี้จะมีคำตอบเดียว คือ $x = A^{-1} B$
2. ถ้า A เป็น Singular Matrix (det(A)) = 0 แล้ว
   2.1 ระบบสมการนี้จะมีคำตอบจำนวนมากมายไม่จำกัด หรือระบบสมการไม่มีคำตอบ
   2.2 ระบบสมการไม่มีคำตอบ

2. โดยใช้ Cramer's Rule จะได้ว่า $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

เมื่อ A_i เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจากการเอาเมตริกซ์ B มาแทนที่หลักที่ I ของ A

x_i เป็นตัวแปรตัวที่ i, i = 1, 2, 3, …

เมตริกซ์

●●แนวข้อสอบเรื่องเมตริกซ์

1. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงและ $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ให้ $C_{ij}(A)$ คือ โคแฟกเตอร์ของสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ i หลักที่ j ของ A

ถ้า $C_{12}(A) = 1$ และ $\det(A) = -5$ แล้ว a เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. -5　　2. -1　　3. 2　　4. 3

2. เซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x^2 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกฐานคือข้อใด

1. $\left\{1, \frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right\}$　　3. $\left\{1, \frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right\}$

2. $\{1, 5+3\sqrt{3}, 5-3\sqrt{3}\}$　　4. $\{1, 3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\}$

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ถ้า B เป็นเมตริกซ์ที่ทำให้ $AB = BA = I$

แล้ว

ค่าของ $\det(\operatorname{adj} B^{-1})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1　　2. 16　　3. 25　　4. 36

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ถ้า $X = (B + C)A$ แล้ว X^{-1} คือ

เมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　　2. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　　3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$　　4. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

5. ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์จตุรัสมิติ 4x 4 และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 4 x 4

โดยที่ $A(\operatorname{adj} A) - BA = I$ ถ้า $\det B = 0$ แล้ว $\det A$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1　　2. 0　　3. 1　　4. 2

6. ถ้า $A = \left[a_{ij} \right]_{nxn}$ เมื่อ aij เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว ข้อความต่อไปนี้ข้อใดผิด

1. $\det(AA^t) = \det(A^2)$
2. $\det(KA)^2 = K^{2n}\det(A^2)$ เมื่อ K เป็นจำนวนจริง
3. $\det(A^2 + A) = [\det(A) + 1]\det(A)$
4. $[\det(A)]I = A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A$

7. ให้ A เป็นเมตริกซ์มิติ 3 x 3 และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3 x 3 ถ้า $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ

$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ สอดคล้องกับสมการ $AB - AC - \frac{1}{2}I = 0$ แล้ว A^{-1} คือเมตริกซ์ข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. ถ้า $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(-2A^3A^t(A+A^t)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 768 2. -768 3. 384 4. -384

9. ถ้า $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ แล้ว det AB มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 + \cos^2\theta + \cos^2 3\theta$ 3. $1 + \cos^2\theta - \cos^2 3\theta$
2. $1 - \cos^2\theta + \cos^2 3\theta$ 4. $1 - \cos^2\theta - \cos^2 3\theta$

10. ข้อใดถูก

1. ถ้าเมตริกซ์ U = [1 -1 -4], X = [0 1 2], $V = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ แล้วเมตริกซ์ 3UV - 2XY = [3]
2. ถ้า $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a^2 & a \end{bmatrix}$ เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว a = 2
3. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์จตุรัสที่มีมิติเดียวกันและ det (AB) = 0 แล้ว det (A) = 0 หรือ det (B) = 0
4. ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์มิติ 2 x 2 แล้ว $\det((2A)^{-1}) = \det(2A^{-1})$

11. กำหนด $A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = A^2 + (A^{-1})^2 + 2I$ ดังนั้น $(A^{-1})^2 \; B$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. 2I 2. 4I 3. 4A 4. 8A

12. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & y \\ -2 & y \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ถ้า AB = C แล้ว a จะมีค่าเท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{29}{36}$ 2. $\frac{27}{36}$ 3. $\frac{19}{36}$ 4. $\frac{17}{36}$

13. ถ้า A เป็นเมตริกซ์ ซึ่ง $A \begin{bmatrix} 15 & 0 & 12 \\ -9 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

1. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

14. ให้ A, B เป็นเมตริกซ์จตุรัส, I แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์และ $\underline{0}$ แทนเมตริกซ์ศูนย์ซึ่งมีมิติเดียวกัน ข้อความใดต่อไปนี้ไม่จริง

1. ถ้า AA = $\underline{0}$ แล้ว A = $\underline{0}$
2. ถ้า AB = $\underline{0}$ แล้ว A เป็นแนวซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว B = $\underline{0}$
3. ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ B เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว AB เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์
4. ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว จะมีเมตริกซ์ X ซึ่งทำให้ AX = B

15. ให้ A, B, C เป็นเมตริกซ์จตุรัส และ $\underline{0}$ เป็นเมตริกซ์จตุรัสที่มีมิติเดียวกัน ต่อไปนี้ข้อใดเป็นจริง

1. ถ้า AB = $\underline{0}$ แล้ว A = $\underline{0}$ หรือ B = $\underline{0}$ 3. $(AB)^t = A^tB^t$
2. ถ้า AC = BC และ $C \neq \underline{0}$ แล้ว A = B 4. $\det(AB) = \det(B^tA^t)$

16. กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ 2 x 2 โดยที่ A * B = AB - BA ข้อความใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. A * = B * A 3. A * I = I * A
2. A * A = $\underline{0}$ 4. A * (B + C) = (A*B) + (A*C)

17. กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

1. 0 2. 1 3. -2 4. $\frac{1}{2}$

18. สมการต่อไปนี้มีคำตอบสำหรับ a, x, y ซึ่ง $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ จงหาค่าของ a และความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y จาก $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

1. a = 2 , y = x เท่านั้น
2. a = 3 , y = 2x เท่านั้น
3. a = 2 , y = -x และ a = 5 , y = 2x เท่านั้น
4. a มีค่าไม่จำกัด เพราะจะมี 2 สมการ 3 ตัวแปร

19. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x-2y & 3y-6 \\ y & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & -3 \\ y & 2 \end{bmatrix}$, det (A) = 7 , det (B) = 5 และ xy < -5 ถ้า $C = \begin{bmatrix} x & x-y \\ y & x+y \end{bmatrix}$ แล้ว det (C) มีค่าเท่าใด

1. 17
2. 13
3. 9
4. 4

20. กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2001}$ เท่ากับข้อใด

1. A^{999}
2. A^{1000}
3. A^{1001}
4. A^{2001}