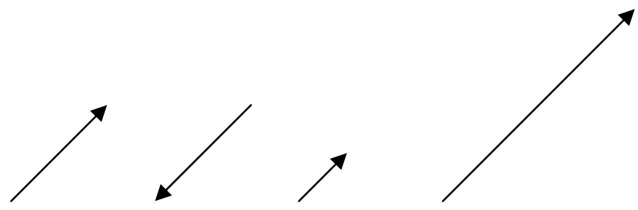
เวกเตอร์ (Vectors)

1.1 สเกลาร์ และเวกเตอร์ (Scalars and Vectors)

สเกลาร์ คือปริมาณที่กำหนดได้สมบูรณ์โดยบอกขนาดเพียงอย่างเดียว เช่น มวล อุณหภูมิ เวลา เป็นต้น

เวกเตอร์ เป็นปริมาณที่กำหนดให้สมบูรณ์โดยบอกทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว ความเร่ง เป็นต้น สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเวกเตอร์นั้นจะใช้ ตัวอักษร โดยมีลูกศรอยู่ด้านบน หรือใช้อักษรตัวหนาก็ได้ เช่น เวกเตอร์ A สามารถเขียนแทนด้วย $\vec{A}$ หรือ $\boldsymbol{A}$

โดยทั่วไปอาจใช้เส้นตรงที่มีลูกศรแทนเวกเตอร์โดยความยาวแทนขนาดของเวกเตอร์ และปลายลูกศรแทนทิศทางของเวกเตอร์ เช่น



$\vec{A}$ $\quad -\vec{A}$ $\quad \frac{1}{2}\vec{A}$ $\quad 2\vec{A}$

รูปที่ 1 *การเขียนแทนเวกเตอร์ด้วยเส้นตรงที่มีลูกศรชี้*

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) คือเวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย เช่น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\vec{A}$ แทนด้วย $\hat{e}_A$ จะเท่ากับ

$$\hat{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$ เมื่อ A แทนขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$

ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{A}$ สามารถเขียนได้เป็น $\vec{A} = A\hat{e}_A$

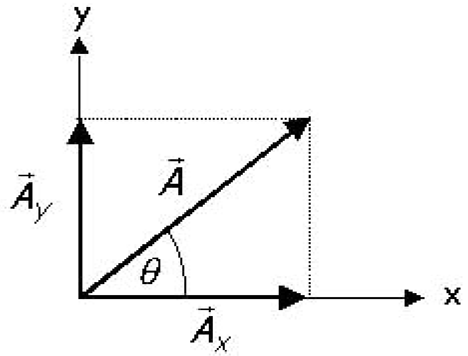
ซึ่งในระบบพิกัดฉาก(Rectangular coordinate system) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางบวกของแกน x, y และz แทนด้วย $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$

1.2 องค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก (Rectangular Components of Vector)

ระบบพิกัดฉากเป็นระบบที่ประกอบด้วยแกน 3 แกนซึ่งตั้งฉากซึ่งกันและกัน คือ แกน X แกน Y และแกน Z โดยมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ ชี้ในทิศทางบวกของแนวแกน X, Y และ Z ตามลำดับ

เวกเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ สามารถแตกออกเป็นเวกเตอร์ย่อย (เวกเตอร์องค์ประกอบ) 2 หรือ 3 เวกเตอร์ได้ หรืออาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของเวกเตอร์ย่อย 2 หรือ 3 เวกเตอร์ได้

การแยกเวกเตอร์องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใน 2 มิติ



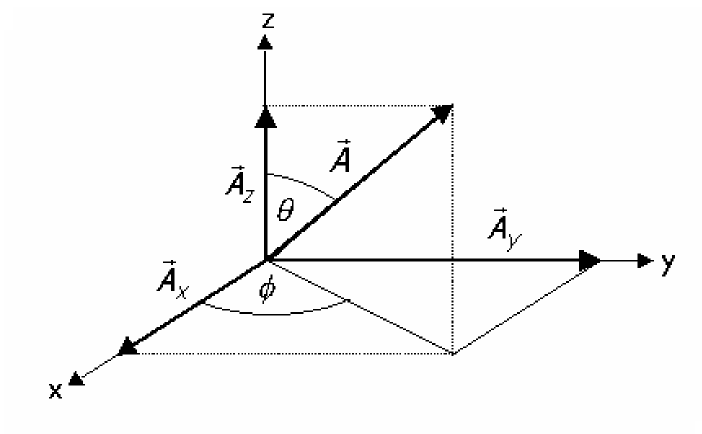
รูปที่ 2 *เวกเตอร์ $\vec{A}$ ในพิกัดฉาก* 2 มิติ

ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$ หรือ $A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

โดยที่ $\vec{A}_x$ และ $\vec{A}_y$ เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และ A_x และ A_y เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}_x$ และ $\vec{A}_y$ ตามลำดับ ซึ่ง

$$A_x = A\cos\theta \quad \text{และ} \quad A_y = A\sin\theta$$

การแยกเวกเตอร์องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใน 3 มิติ



รูปที่ 3 *เวกเตอร์ $\vec{A}$ ในพิกัดฉาก* 3 มิติ

ซึ่งเขียนเปิสมการได้ว่า $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$ หรือ $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

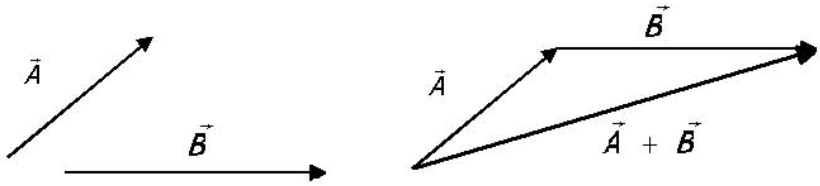
โดยที่ $\vec{A}_x$ $\vec{A}_y$ และ $\vec{A}_z$ เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในแนวแกน x y และ z ตามลำดับ และ A_x A_y และ A_z เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}_x$ และ $\vec{A}_y$ และ $\vec{A}_z$ ตามลำดับ โดยที่

$$A_x = A\sin\theta\cos\phi$$
$$A_y = A\sin\theta\sin\phi$$
$$A_z = A\cos\theta$$

1.3 การบวกและการลบเวกเตอร์ (Vector addition and subtraction)

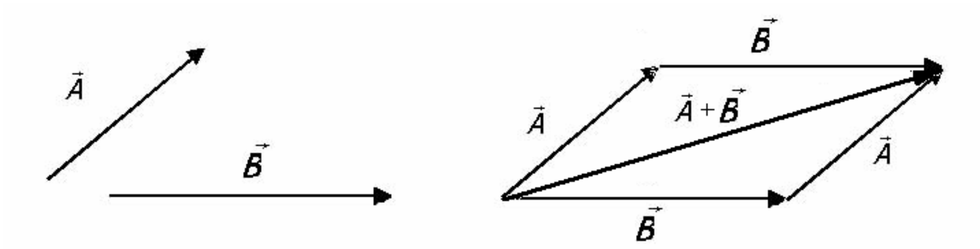
1.3.1 การบวกและการลบเวกเตอร์โดยวิธีเรขาคณิต

1. วิธีโพลิกอน (polygon method)หรือวิธีหางต่อหัว (taial to tip method) ทำโดยกำหนดจุดเริ่มต้นและเขียนเวกเตอร์ตัวแรกให้หางลูกศรอยู่ที่จุดเริ่มต้น แล้วเขียนเวกเตอร์ตัวต่อไปโดยให้หางลูกศรตัวต่อไปต่อจากหัวลูกศรตัวที่แล้วจนครบทุกตัว ผลรวมของเวกเตอร์ทั้งหมด หรือ **เวกเตอร์ลัพธ์** คือลูกศรที่ลากจากจุดเริ่มต้นเข้าหาปลายลูกศรตัวสุด้าย ดังรูปที่ 2



รูปที่ 4 *การบวกเวกเตอร์โดยวิธีโพลิกอน*

2. วิธีสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelelogram method) ทำโดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้เวกเตอร์ที่จะทำการบวกกันเป็นด้านแต่ละคู่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน และเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมเป็นเวกเตอร์ลัพธ์ ดังรูป

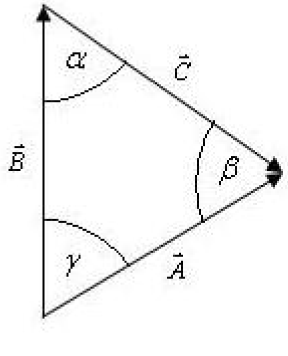


รูปที่ 5 *การบวกเวกเตอร์โดยวิธีสี่เหลี่ยมด้านขนาน*

ซึ่งการลบเวกเตอร์โดยวิธีเรขาคณิตสามารถทำโดยการกลับทิศของเวเตอร์ของตัวลบแล้วนำมาบวกกับเวกเตอร์ตัวตั้งเช่นเดียวกับการบวกเวกเตอร์ทั้งสองวิธี

1.3.1 การบวกและการลบเวกเตอร์โดยวิธีตรีโกณมิติ

พิจารณาสามเหลี่ยมที่มีด้านเป็นเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ดังรูปที่ 5 ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้



$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$$

รูปที่ 6 *สามเหลี่ยมที่มีด้านเป็นเวกเตอร์* $\vec{A}$, $\vec{B}$ *และ* $\vec{C}$

กฎของไซน์ (Sine ‘s law)

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$

กฎของโคไซน์ (Cosine ‘s law)

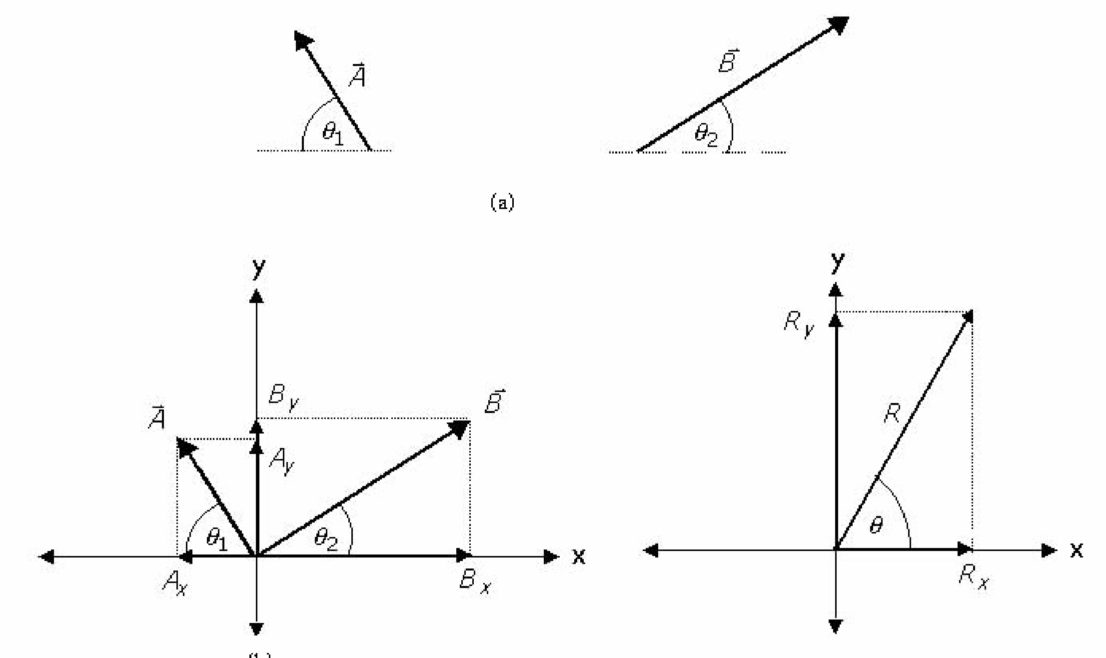
$$\begin{aligned} A^2 &= B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha \\ B^2 &= A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta \\ C^2 &= B^2 + C^2 - 2AB\cos\gamma \end{aligned}$$

1.3.1 การบวกและการลบเวกเตอร์โดยวิธีแยกองค์ประกอบ

หลักการรวมเวกเตอร์โดยวิธีแยกองค์ประกอบทำโดยการแตกเวกเตอร์ที่ต้องการนำมารวมกันเข้าในแต่ละแนวแกนเป็นเป็นเวกเตอร์องค์ประกอบจากนั้นรวมเวกเตอร์องค์ประกอบในแต่ละแนวแกนเข้าด้วยกันเป็นเวกเตอร์ลัพท์ในแต่ละแนวแกน แล้วรวมเวกเตอร์ลัพท์ในแต่ละแนวแกนเข้าด้วยกันจะได้เป็นผลลัพท์ของการรวมเวกเตอร์

ตัวอย่างเช่น การรวมเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ซึ่งจะได้ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ ดังรูป โดยแยกองค์ประกอบแต่ละเวกเตอร์ได้ดังรูปที่ 7b โดยที่

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_x\hat{j} \quad \text{และ} \quad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$



รูปที่ 7 *การรวมเวกเตอร์โดยวิธีแยกองค์ประกอบ*

ผลลัพธ์ในแต่ละแนวแกนจะได้ดังรูปที่ 7c โดยที่

$$\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x \quad \text{และ} \quad \vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y$$

ขนาดของ $\vec{R}$ เท่ากับ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

ทิศของ $\vec{R}$ เท่ากับ $\theta = \tan^{-1} \dfrac{R_y}{R_x}$

สมบัติการบวกและลบเวกเตอร์

ให้ $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ และ m และ n เป็นปริมาณสเกลาร์

1. $\vec{A} = \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน
2. $\vec{A} = -\vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม
3. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
4. $\vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C}$
5. เมื่อคูณ $\vec{A}$ ด้วย m จะได้เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น m เท่าของขนาดเวกเตอร์ และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{A}$ ถ้า m มีค่าเป็นบวก และมีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\vec{A}$ ถ้า m มีค่าเป็นลบ
6. $m\vec{A} = \vec{A}m$
7. $m\left(n\vec{A}\right) = (mn)\vec{A}$
8. $(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$
9. $m\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = m\vec{A} + m\vec{B}$

1.4 การคูณเวกเตอร์ (Vector multiplication)

1.4.1 dot product (scalar product) เป็นการคูณกันของเวกเตอร์กับเวกเตอร์ซึ่งผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ$\vec{B}$ ซึ่งอยู่ระหว่าง 0 ถึง π ผลคูณแบบ dot product สามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

สมบัติพื้นฐานของการคูณแบบ scalar product

1. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
2. $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
3. $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$
4. $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$
5. ถ้า $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_x\hat{j} + A_z\hat{k}$ และ $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ แล้ว

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B} = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = B^2$$

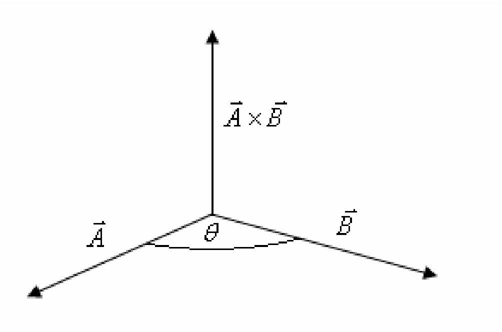
6. ถ้า $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ และ $\vec{A} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$ แล้วแสดงว่า $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

1.4.2 cross product (vector product) เป็นการคูณกันของเวกเตอร์ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางเป็นไปตาม “กฎมือขวา”

ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ซึ่งอยู่ระหว่าง 0 ถึง π ผลคูณแบบ cross product สามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{A}\times\vec{B} \quad = \quad AB\sin\theta\,\hat{e}$$

เมื่อ $\hat{e}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบ A B



รูปที่ 8 *การคูณเวกเตอร์แบบ cross product*

ผลคูณเวกเตอร์แบบ cross product นี้อาจเขียนในรูปผลคูณขององค์ประกอบ คือ

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{i} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\hat{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k}$$

หรืออาจเขียนในรูปดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) คือ

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

สมบัติพื้นฐานของการคูณแบบ cross product

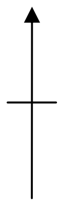
1. $\vec{A}\times\vec{B} \quad = \quad \vec{B}\times\vec{A}$
2. ถ้า m เป็นปริมาณ สเกลาร์ จะได้ว่า
$$\begin{aligned} m\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) &= m\vec{A}\times\vec{B} \\ &= \vec{A}\times\left(m\vec{B}\right) \\ &= \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)m \end{aligned}$$
3. $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$
4. $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$ และ $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$
5. $\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$, $\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$ และ $\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$
6. ถ้า $\vec{A}\times\vec{B} = 0$ และ $\vec{A}\neq 0$, $\vec{B}\neq 0$ แล้วแสดงว่า $\vec{A}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{B}$

แบบฝึกหัด

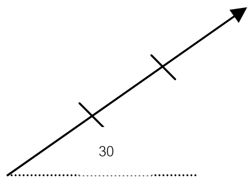
1 . จงหาผลรวมของเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ โดยใช้วิธี

1. วิธีหางต่อหัว (เขียนรูป)
2. สี่เหลี่ยมด้านขนาน (เขียนรูป)
3. วิธีแยกองค์ประกอบ (บอกทั้งขนาดและทิศทาง)

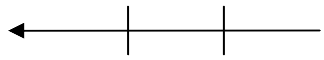
1.1



$\vec{A}$

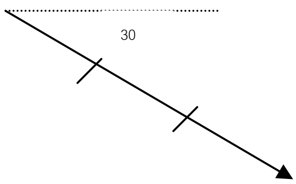


$\vec{B}$

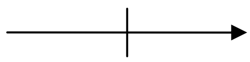


$\vec{C}$

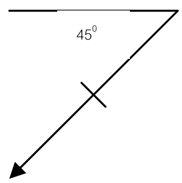
1.2



$\vec{A}$



$\vec{B}$



$\vec{C}$

2. ถ้า $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ และ $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ จงหา

2.1 $\vec{A} + \vec{B}$

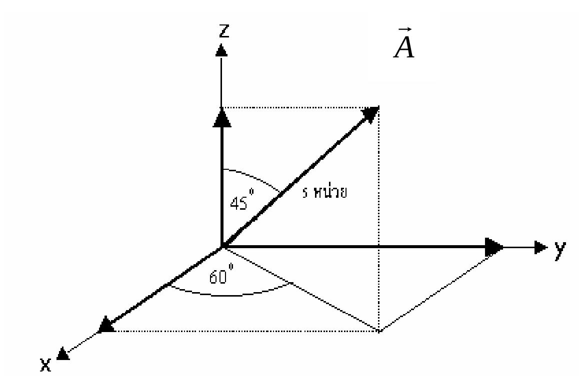
2.2 $\vec{A} - \vec{B}$

2.3 $\vec{A} \cdot \vec{B}$

2.4 $\vec{A} \times \vec{B}$

3. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$

3.1



3.2