1.8 ฟังก์ชันอินเวอร์ส

เนื่องจากทุก ๆ ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นเราจึงสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน **(Inverse of Function)** ได้เสมอ **แต่สิ่งที่น่าสนใจก็คือ อินเวอร์สของฟังก์ชันที่ได้นั้นจะยังคงเป็นฟังก์ชันหรือไม่** จะตอบคำถามนี้โดยศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 33 ให้ $f=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ หา $f^{-1}=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

จะพบว่า f^{-1} **เป็นฟังก์ชัน**

ตัวอย่างที่ 34 ให้ $g=\{(1,a),(2,a),(3,c)\}$

จงหา g^{-1} และพิจารณาว่า g^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ หา $g^{-1}=\{(a,1),(a,2),(c,3)\}$

จะพบว่า g^{-1} **ไม่เป็นฟังก์ชัน**

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งอินเวอร์สของ f เป็นฟังก์ชันแล้ว เราเรียก อินเวอร์สของฟังก์ชัน f นี้ว่าเป็น **ฟังก์ชันอินเวอร์ส หรือ ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function)**

กำหนดให้ $f=\{(x,y)\in A\times B \mid y=f(x)\}$

ดังนั้น $f^{-1}=\{(x,y)\in A\times B \mid y=f^{-1}(x)\}$

วิธีการหา $f^{-1}(x)$

ฟังก์ชันที่ กำหนดในรูป $y=f(x)$) มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จากรูป $y=f(x)$ จัดรูปใหม่ให้เป็น x ในเทอมของ y $\boxed{x=f(y)}$

ขั้นที่ 2 แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ดังนั้น y **รูปใหม่ที่ได้ คือ** $f^{-1}(x)$

ตัวอย่างที่ 35 กำหนดให้ $f(x) = 4x - 3$ จงหา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = 4x - 3$

หรืออาจจะเขียนใหม่ได้ว่า $y = 4x - 3$

ขั้นที่ 1 จัดรูปใหม่ให้เป็น x ในเทอมของ y

ขั้นที่ 2 แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x

ตัวอย่างที่ 36 ให้ $f(2x+1) = 3x + 7$ จงหา $f^{-1}(x)$ และ $f^{-1}(2)$

วิธีทำ

หมายเหตุ สำหรับ $f:(x,y)\in R\times R$ จะได้ว่า

$$\boxed{\boldsymbol{f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x}}$$

ตัวอย่างที่ 37 กำหนดให้ $f(x)=4x+5$ จงแสดงว่า

1. $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$
2. $f^{-1}(f(5x)) = 5x$

วิธีทำ

1.9 พีชคณิตของฟังก์ชัน

นิยาม พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of function)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของ f และ g ตามลำดับ โดยที่ $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ จะได้ว่า

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ โดยที่ $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ โดยที่ $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ โดยที่ $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ โดยที่ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

หมายเหตุ ถ้า $D_f \cap D_g = \varnothing$ จะไม่สามารถหาพีชคณิตของฟังก์ชันได้

ตัวอย่างที่ 38 กำหนดให้ $f = \{(1,4),(2,9),(3,8),(4,6),(5,1)\}$
และ $g = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,0),(6,3)\}$
จงหา $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$

วิธีทำ

หา $D_f = \{.......................\}$ และ หา $D_g = \{.......................\}$

หา $D_f \cap D_g = \{.......................\}$

หา $f+g =$ ....

หา $f-g =$ ....

หา $f \cdot g =$ ....

หา $\frac{f}{g} =$ ....

ตัวอย่างที่ 39 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

จงหา 1. D_{f+g}

2. $(f+g)(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 40 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{4-x}$ และ $g(x) = \sqrt{x-1}$

จงหา 1. $D_{f \cdot g}$

2. $(f \cdot g)(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 41 กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = 3x - 4$

จงหา 1. $D_{\frac{f}{g}}$

2. $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 42 กำหนดให้ $(f + g)(2) = 10$ และ $f(2) = -3$ จงหา $g(2)$

วิธีทำ

จากนิยาม $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

ตัวอย่างที่ 43 กำหนดให้ $f(x) = x + 3$ และ $g(x) = \sqrt{x + 7}$ จงหาค่าของ $(f + g)(2)$

วิธีทำ จากนิยาม $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

ดังนั้น $(f + g)(2) = f(2) + g(2)$

$$= (2 + 3) + \left(\sqrt{2 + 7}\right)$$

$$= 5 + \sqrt{9}$$

$$= 5 + 3$$

$\therefore (f + g)(2) = 8$

1.10 ประเภทของฟังก์ชัน

โดยทั่วไปแบ่งฟังก์ชันออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Functions) คือ ฟังก์ชันที่มีค่าอยู่ในรูปนิพจน์ที่ประกอบด้วย จำนวนจริง ตัวแปร หรือเครื่องหมายในทางพีชคณิต เช่น บวก ลบ คูณ หาร กรณฑ์ และ กำลัง

ฟังก์ชันพีชคณิตที่สำคัญมีดังนี้

1.1 <u>ฟังก์ชันพหุนาม</u> (Polynomail Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นค่าคงที่ และ $n = 0$ หรือ $n \in \mathrm{I}^+$

ถ้า $n = 0$, $f(x) = a_0$ เรียกว่า ฟังก์ชันคงที่ (constant function)

เช่น $f(x) = 8$

ถ้า $n = 1$, $f(x) = a_0 + a_1x$ เรียกว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function)

เช่น $f(x) = 2x + 3$

ถ้า $n = 2$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ เรียกว่า ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function)

เช่น $f(x) = 3x^2 - x + 1$

<u>หมายเหตุ</u> $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ เรียกว่าเป็นพหุนามของ x ที่มีดีกรี n ถ้า $a_n \neq 0$

1.2 <u>ฟังก์ชันตรรกยะ</u> (Rational Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปเศษส่วนของฟังก์ชันพหุนาม

นั่นคือ $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนาม เช่น $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 5}{x - 10}$

1.3 <u>ฟังก์ชันอตรรกยะ</u>(Irrational Function) คือฟังก์ชันพีชคณิตที่ไม่ใช่ฟังก์ชันตรรกยะ

เช่น $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x} + \sqrt{4 + x}}{16 - x^2}$, $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{(x + 8)^2}}$ เป็นต้น

2. **ฟังก์ชันอดิสัย** (Trancendental Functions) คือ ฟังก์ชันใดๆ ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก เป็นต้น ตัวอย่างเช่น $y = \sin x$, $y = 5^x$, $y = \log_4(3x^5 + 7)$, $y = \cosh(x^3) + \sinh^2(e^x)$