1.5 โดเมน และ เรนจ์ ของฟังก์ชัน

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้น โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน จึงมีนิยามเหมือนกับโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ นั่นคือ

> **นิยาม** ให้ f เป็นฟังก์ชัน
>
> **โดเมน (Domain) ของฟังก์ชัน** f คือ เซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับทั้งหมดใน f
>
> เขียนแทนด้วย D_f นั่นคือ $D_f = \{x \mid (x, y) \in f\}$
>
> **เรนจ์ (Range) ของฟังก์ชัน** f คือ เซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน f
>
> เขียนแทนด้วย R_f นั่นคือ $R_f = \{y \mid (x, y) \in f\}$

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดให้ $f = \left\{(x, y) \in R \times R \mid y = \dfrac{4}{1+x^2}\right\}$ จงหา D_f และ R_f

วิธีทำ **หา** D_f จาก $\boxed{y = \dfrac{4}{1+x^2}}$

จะพบว่าไม่ว่า x เป็นจำนวนจริงใดๆจะสามารถหาค่า $y \in R$ ได้เสมอ

ดังนั้น $D_f = \{x \mid x \in R\}$ **หรือ** $D_f = R$

หา R_f จาก $y = \dfrac{4}{1+x^2}$

จัดรูปใหม่ให้เป็น $x =$ เทอมของ y ได้ดังนี้

$$y + x^2 y = 4$$

$$x^2 y = 4 - y$$

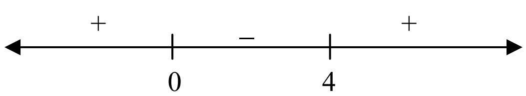
$$x^2 = \frac{4-y}{y}$$

$$\boxed{\therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{4-y}{y}}} \qquad \text{โดยที่ } y \neq 0$$

x จะหาค่าได้เมื่อ $\dfrac{4-y}{y} \geq 0$ ดังนั้นแก้อสมการหาค่า y ได้ว่า

$$y(4-y) \geq 0$$

$$y(y-4) \leq 0$$



$\therefore R_f = \{\, y \mid y \in R,\ 0 < y \leq 4 \,\}$ หรือ $R_f = (0, 4]$

1.6 การหาค่าของฟังก์ชัน

นิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ และ $(x, y) \in f$ เราเรียก y ว่าเป็น**ค่าของฟังก์ชัน** f **ที่** x และ เขียนแทนด้วย $y = f(x)$

เช่น $f(5)$ หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = 5$

จากนิยาม เราจะแทน $(x, y) \in f$ ด้วย $y = f(x)$ นั่นเอง

เช่น 1) $f = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ จะได้ว่า $(1,2) \in f$ เขียนแทนด้วย $2 = f(1)$

$(3,4) \in f$ เขียนแทนด้วย $4 = f(3)$

$(5,6) \in f$ เขียนแทนด้วย $6 = f(5)$

2) $f = \{(a, b),(c, d)\}$ จะได้ว่า $(a, b) \in f$ เขียนแทนด้วย $b = f(a)$

$(c, d) \in f$ เขียนแทนด้วย $d = f(c)$

3) $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$

จะได้ว่า $(x, y) \in f$ เขียนแทนด้วย $y = f(x)$

หรือ $f(x) = 2x + 1$ หรือ $y = 2x + 1$

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดให้ $f(x) = 2x - x^2$ จงหาค่าต่อไปนี้

1. $f(-3)$ 2. $f(2)$

3. $f(a)$ 4. $f(2 + b)$

วิธีทำ 1. $f(-3) =$ ....

2. $f(2) =$ ....

3. $f(a) =$ ....

4. $f(2 + b) =$ ....

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดให้ $g(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 0 \\ 2x - 1 & ; 0 \le x < 10 \\ \dfrac{2}{x} & ; x \ge 10 \end{cases}$

จงหา $\dfrac{g(-5) + g(12)}{g(3)}$

วิธีทำ

หา $g(-5) =$ ....

หา $g(12) =$ ....

หา $g(3) =$ ....

จะได้ $\dfrac{g(-5) + g(12)}{g(3)} =$ ....

$\therefore \quad \dfrac{g(-5) + g(12)}{g(3)} =$ ....

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ จงหา $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 23 กำหนดให้ $f(2x+1)=x-1$ จงหา $f(u)$ และ $f(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 24 กำหนดให้ $g(x)=x^2+4$ จงหา $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 25 ให้ $f(x)=8+x$ และ $g(x)=f(x+1)-f(x)$ จงหาค่าของ $g(2)$

วิธีทำ

จาก $g(x)=f(x+1)-f(x)$

ดังนั้น $g(2)=f(2+1)-f(2)$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$\therefore\ g(2)=1$

ตัวอย่างที่ 26 ในการใช้โทรศัพท์ของบ้านหลังหนึ่งจะต้องเสียค่าธรรมเนียมรายเดือน ๆ ละ 100 บาท และค่าโทรออกครั้งละ 3 บาท

เมื่อให้ x แทนจำนวนครั้งที่โทรออก (ครั้ง)

และ $f(x)$ แทนค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการใช้โทรศัพท์ต่อเดือน (บาท)

จงหา 1. ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการใช้โทรศัพท์ต่อเดือน

2. ค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการใช้โทรศัพท์เมื่อมีการโทรออก 68 ครั้งต่อเดือน

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 27 ในการจำหน่ายปากกาลูกลื่นให้ลูกค้าของโรงงานแห่งหนึ่ง เป็นดังนี้

ถ้าซื้อไม่เกิน	10 โหล	ราคาโหลละ	80 บาท
ถ้าซื้อมากกว่า	10 โหลแต่ไม่เกิน 50 โหล	ราคาโหลละ	70 บาท
ถ้าซื้อมากกว่า	50 โหล	ราคาโหลละ	48 บาท

เมื่อให้ x แทนจำนวนปากกาลูกลื่นที่ลูกค้าซื้อ (โหล)

และ $f(x)$ แทนจำนวนเงินที่ลูกค้าต้องชำระ (บาท)

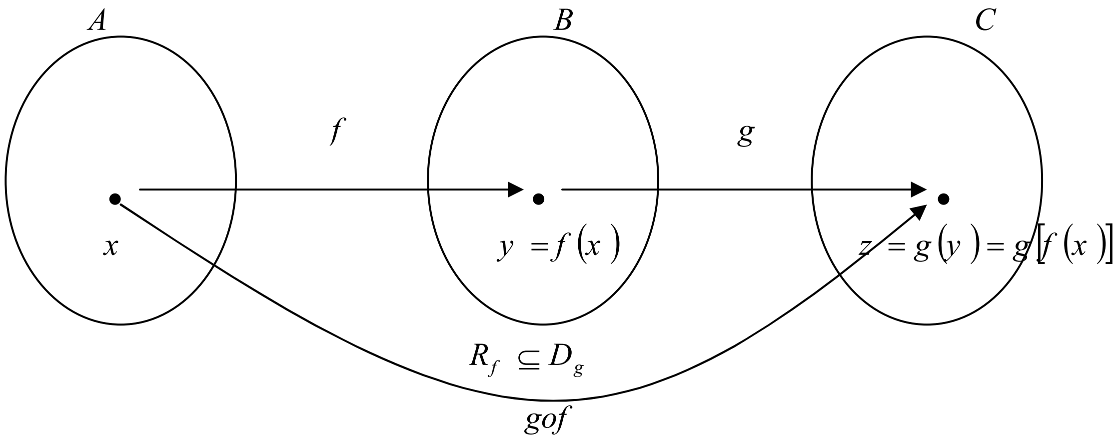
จงหา 1. ฟังก์ชันในการชำระเงินของลูกค้า (บาท)

2. ถ้าลูกค้าซื้อปากกาลูกลื่น 45 โหล จะต้องชำระเงินกี่บาท

วิธีทำ

1.7 ฟังก์ชันประกอบ

นิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B $(f : A \to B)$
และ g เป็นฟังก์ชันจากเซต B ไปยังเซต C $(g : B \to C)$
ฟังก์ชันประกอบ (Composite function) ของ f และ g
เขียนแทนด้วย gof (อ่านว่า จี โอ เอฟ) คือ ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต C
นั่นคือ $gof = \{(x, z) \in A \times C \,/\, z = (gof)(x) = g[f(x)]\}$



รูปที่ 1.1

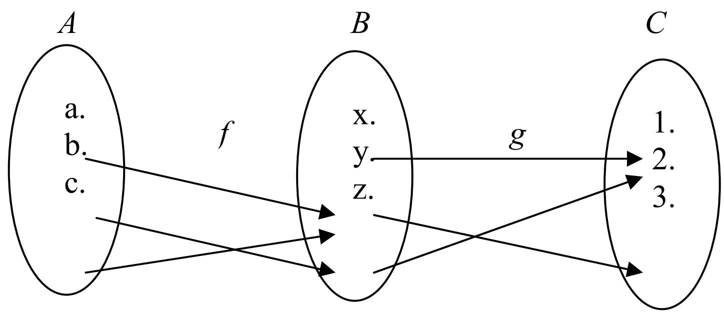
จากรูปที่ 1.1 $(x, y) \in f$ เขียนแทนด้วย $y = f(x)$
$(y, z) \in g$ เขียนแทนด้วย $z = g(y)$
จะได้ว่า $(x, z) \in gof$ เขียนแทนด้วย $z = (gof)(x)$
$\therefore (gof)(x) = g(y) = g(f(x))$
ดังนั้น $\boxed{(gof)(x) = g(f(x))}$

ในทำนองเดียวกัน $(fog)(x) = f(g(x))$

ข้อสังเกต

1) จากนิยามจะได้ว่า $R_f \subseteq D_g$ หรือ อาจกล่าวได้ว่า**เราจะสร้างฟังก์ชันประกอบ** gof **ได้เมื่อ** $R_f \subseteq D_g$
2) $D_{gof} \subseteq D_f$ และ $R_{gof} \subseteq R_g$

ตัวอย่างที่ 28 ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ เป็นฟังก์ชันตามแผนภาพต่อไปนี้



จงหา gof

วิธีทำ จากแผนภาพข้างต้น จะได้ว่า $R_f = \{y, z\}$ และ $D_g = \{x, y, z\}$

ดังนั้น $R_f \subseteq D_g$ จึงสามารถสร้างฟังก์ชัน gof ได้

$\therefore gof = \{$ .... $\}$

ตัวอย่างที่ 29 กำหนดให้ $f(x) = 3x - 1$ และ $g(x) = x^2 + 3$ จงหา

1. $(gof)(x)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $R_f = R$ และ $D_g = R$

ดังนั้น $R_f \subseteq D_g$ จึงสามารถสร้างฟังก์ชัน gof ได้

จากนิยาม $(gof)(x) = g[f(x)]$

....

....

....

....

....

....

....

2. $(gof)(3)$

วิธีทำ

จากข้อ1. จะได้ว่า $(gof)(3) =$ ....

3. $(fog)(2x)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $R_g = [3, \infty)$ และ $D_f = R$

ดังนั้น $R_g \subseteq D_f$ จึงสามารถสร้างฟังก์ชัน fog ได้

จากนิยามจะได้ว่า

$(fog)(2x) =$

4. $(gog)(-3)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $R_g = [3, \infty)$ และ $D_g = R$

ดังนั้น $R_g \subseteq D_g$ จึงสามารถสร้างฟังก์ชัน gog ได้

จากนิยามจะได้ว่า $(gog)(-3) =$

ตัวอย่างที่ 30 กำหนดให้ $f(x) = 2x - 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จงหา $(gof)(x)$

วิธีทำ หา $R_f = R$ และ $D_g = [0, \infty)$

จะพบว่า $R_f \not\subset D_g$ ดังนั้น **สร้างฟังก์ชัน** gof **ไม่ได้**

ตัวอย่างที่ 31 กำหนดให้ $g(x) = 3x + 2$ และ $g(f(x)) = 3x + 8$ จงหา $f(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 32 กำหนดให้ $f(x) = x + 2$ และ $(gof)(x) = 3x - 5$ จงหา $g(x)$

วิธีทำ