

## 1.2 โดเมน และ เรนจ์ ของความสัมพันธ์

นิยาม ให้  $r$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$

โดเมน (Domain) ของความสัมพันธ์  $r$  คือ เซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับทั้งหมดใน  $r$

$$\text{เขียนแทนด้วย } D_r \text{ นั่นคือ } D_r = \{x | (x, y) \in r\} \quad ; \quad D_r \subseteq A$$

เรนจ์ (Range) ของความสัมพันธ์  $r$  คือ เซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน  $r$

$$\text{เขียนแทนด้วย } R_r \text{ นั่นคือ } R_r = \{y | (x, y) \in r\} \quad ; \quad R_r \subseteq B$$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้  $A = \{1, 3, 6, 8\}$  และ  $B = \{1, 2, 4, 8\}$

จงหา  $D_r$  และ  $R_r$  ของความสัมพันธ์  $r$  “มากกว่า” จาก  $A$  ไป  $B$

วิธีทำ

เขียน  $r$  แบบแจกแจงสมาชิก

$$\text{จะได้ } r = \{(3, 1), (3, 2), (6, 1), (6, 2), (6, 4), (8, 1), (8, 2), (8, 4)\}$$

$$\text{ดังนั้น } D_r = \{3, 6, 8\}$$

$$\text{และ } R_r = \{1, 2, 4\}$$

ข้อสังเกต

$$D_r \subseteq A \quad \text{และ} \quad R_r \subseteq B$$

### การหาโดเมน และ เรนจ์ของความสัมพันธ์

ในกรณีที่ความสัมพันธ์กำหนดในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไข สามารถทำการหาได้ดังนี้

$$\text{กำหนดให้ } r = \{(x, y) \in A \times B | y = r(x)\}$$

#### 1. เมื่อต้องการหาโดเมน

ให้จัด  $y$  ในเทอมของ  $x$  “[ $y = r(x)$ ]” แล้วพิจารณาค่า  $x$  ที่จะเป็นจำนวนใดบ้างที่แทนแล้วทำให้หาค่า  $y$  ที่ได้ยังอยู่ในเซตที่กำหนดให้ เซตของค่า  $x$  ที่ได้เหล่านั้น คือ โดเมนของ  $r$

#### 2. เมื่อต้องการหาเรนจ์

ให้จัด  $x$  ในเทอมของ  $y$  “[ $x = r(y)$ ]” แล้วพิจารณาค่า  $y$  ที่จะเป็นจำนวนใดบ้างที่แทนแล้วทำให้หาค่า  $x$  ที่ได้ยังอยู่ในเซตที่กำหนดให้ เซตของค่า  $y$  ที่ได้เหล่านั้น คือ เรนจ์ของ  $r$

**ข้อสังเกต** จำนวนที่แทนแล้วทำให้เกิดกรณีต่อไปนี้จะไม่ใช่สมาชิกของโดเมนหรือเรนจ์

- 1) แทนแล้วทำให้ตัวหารเป็นศูนย์
- 2) แทนแล้วทำให้ค่าในรากที่สองติดลบ

**ตัวอย่างที่ 9** กำหนดให้  $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x - 3y - 1 = 0\}$  และ  $A = \{2, 3, 4, 10, 13, 15\}$   
 จงหา  $D_r$ ,  $R_r$

**วิธีทำ**

จากเงื่อนไข  $x - 3y - 1 = 0$

จัดรูปใหม่เป็น  $y$  ในเทอมของ  $x$

จะได้ 
$$y = \frac{x-1}{3}$$

พิจารณตาราง

$x$	2	3	4	10	13	15
$y = \frac{x-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	3	4	$\frac{14}{3}$

พิจารณาค่า  $x$  ที่ทำให้  $y$  อยู่ใน  $A$  และเขียน  $r$  แบบแจกแจงสมาชิก

จะได้  $r = \{(10, 3), (13, 4)\}$

ดังนั้น  $D_r = \{10, 13\}$

และ  $R_r = \{3, 4\}$

**ตัวอย่างที่ 10** กำหนดให้  $r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = 2x - 3\}$  จงหา  $D_r$  และ  $R_r$

**วิธีทำ**

จากเงื่อนไข  $y = 2x - 3$

พิจารณาค่า  $x$  และ  $y$  จากตาราง

$x$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y = 2x - 3$	...	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	...

จะได้  $D_r = \{x \mid x \in I\}$

และ  $R_r = \{y \mid y \in I \text{ และ } y \text{ เป็นจำนวนคี่}\}$

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้  $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{2x+1}{3x-7} \right\}$  จงหา  $D_r$  และ  $R_r$

วิธีทำ

หา  $D_r$  ให้จัด  $y$  ในเทอมของ  $x$

จากเงื่อนไข  $y = \frac{2x+1}{3x-7}$  (จัดรูป  $y$  ในเทอมของ  $x$  แล้ว)

ให้พิจารณา  $3x - 7 \neq 0$

$$x \neq \frac{7}{3}$$

$$\therefore D_r = \left\{ x \in R \mid x \neq \frac{7}{3} \right\}$$

หา  $R_r$  ให้จัด  $x$  ในเทอมของ  $y$

จากเงื่อนไข  $y = \frac{2x+1}{3x-7}$

จัดรูปใหม่จะได้ว่า  $y(3x-7) = 2x+1$

$$3xy - 7y = 2x + 1$$

$$3xy - 2x = 7y + 1$$

$$x(3y - 2) = 7y + 1$$

$$x = \frac{7y+1}{3y-2}$$

พิจารณา  $3y - 2 \neq 0$

$$y \neq \frac{2}{3}$$

$$\therefore R_r = \left\{ y \in R \mid y \neq \frac{2}{3} \right\}$$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้  $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-3} \right\}$  จงหา  $D_r$  และ  $R_r$

วิธีทำ

### 1.3 อินเวอร์สของความสัมพันธ์ (Inverse of a Relation)

นิยาม ให้  $r$  เป็นความสัมพันธ์จากเซต  $A$  ไปยังเซต  $B$  อินเวอร์สของความสัมพันธ์  $r$  (Inverse of a function  $r$ ) ซึ่งเขียนแทนด้วย  $r^{-1}$  (อ่านว่า อินเวอร์สของ  $r$ )

คือ ความสัมพันธ์จากเซต  $B$  ไปยังเซต  $A$  ซึ่งประกอบด้วย  $(y,x)$  โดยที่  $(x,y) \in r$

**ตัวอย่างที่ 13** กำหนดให้  $r$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$

โดยที่  $A = \{1,2,3\}$  ,  $B = \{1,3\}$  และ  $r = \{(1,1), (3,1), (2,3)\}$

จงหา  $r^{-1}$  ,  $D_r$  ,  $R_r$  ,  $D_{r^{-1}}$  และ  $R_{r^{-1}}$

**วิธีทำ**  $\therefore r^{-1} = \{(\dots, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots)\}$

$D_r = \{\dots\}$  และ  $R_r = \{\dots\}$

$D_{r^{-1}} = \{\dots\}$  และ  $R_{r^{-1}} = \{\dots\}$

**ข้อสังเกต**  $D_r = R_{r^{-1}}$  และ  $R_r = D_{r^{-1}}$

ในกรณีที่โจทย์บางข้อไม่สามารถเขียนอินเวอร์สของความสัมพันธ์  $r$  ในรูปของเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้ เราสามารถเขียนอินเวอร์สของความสัมพันธ์  $r$  ในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไข

**การเขียนอินเวอร์สของความสัมพันธ์ในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไข**

โดยทั่วไปเขียนได้ 2 แบบดังต่อไปนี้

กำหนดให้  $r = \{(x,y) \in A \times B \mid y = r(x)\}$

**แบบที่ 1**  $r^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid y = r(x)\}$

หรือ

**แบบที่ 2**  $r^{-1} = \{(x,y) \in B \times A \mid x = r(y)\}$

**หมายเหตุ** โดยส่วนใหญ่จะนิยมใช้แบบที่ 2 มากกว่าเพราะว่า นิยมใช้  $(x,y)$  มากกว่า  $(y,x)$

แต่สิ่งสำคัญคือ จะต้องเปลี่ยนจาก  $A \times B$  เป็น  $B \times A$  ทั้งสองแบบ เพราะว่า

ถ้า  $r$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$  แล้ว  $r^{-1}$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $B$  ไป  $A$







ค.) ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ในรูปของกราฟ

ในบางครั้งความสัมพันธ์ที่กำหนดให้จะให้มาเป็นกราฟ หรือสมการที่เขียนกราฟได้ ในการพิจารณาว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ อาจทำได้โดยการลากเส้นให้ขนานกับแกน  $y$  ถ้ามีเส้นขนานกับแกน  $y$  เส้นใดเส้นหนึ่ง ตัดกราฟตั้งแต่ 2 แห่งขึ้นไป แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 18 จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชัน

